

Επανάληψη Β ΚΑΤ

1. Μέθοδοι απόδειξης

- Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα:
 - $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
 - $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2 - n$
 - $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 - $3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = 2n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}$
- Να δείξετε ότι ο αριθμός: $5^{2n} - 1$ είναι πολλαπλάσιος του 6, για όλους τους θετικούς ακераίους n .
- Να αποδείξετε ότι το 9 διαιρεί την παράσταση $A = 4^n + 15n - 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
- Να αποδείξετε ότι: αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός αριθμός, τότε και ο $4n^3 + 2n - 1$ είναι περιττός.
- Με τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγή να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $\alpha^2 + \alpha - 1, \alpha \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, τότε ο α είναι άρτιος.
- Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι $\forall x > 0$ ισχύει η σχέση:

$$\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + \dots + \ln x^n = \frac{n(n+1)\ln x}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Τριγωνομετρία

- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} < 90^\circ$) δίνονται: $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2, a = 2 \text{ cm}$ και $\beta = 4 \text{ cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο. (Να υπολογίσετε όλες τις πλευρές και τις γωνίες του)
- Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} < 90^\circ$), αν δίνονται: $\alpha = 6\sqrt{3} \text{ cm}, \gamma = 6 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta = 2\alpha \sin \Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\beta \sin \Gamma + \gamma \sin \Gamma = \alpha \sin(\Gamma)$.
- Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\beta = \sqrt{3} \text{ cm}, \gamma = 1 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
- Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = \frac{\gamma}{2\beta}$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.
- Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\hat{A} = 60^\circ, E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ και ισχύει η σχέση $\beta = 2\gamma$
- Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha = \beta \sin \Gamma$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να ορίσετε την ορθή γωνία.
- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta \mu A + \sin A \cdot \varepsilon \varphi \Gamma = \frac{\eta \mu \Gamma}{\sin B}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.
- Να αποδείξετε ότι: $\sin 4\alpha = 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 1$.
- Δίνεται η παρασάση $A = \frac{1 + \eta \mu 2x - \sin 2x}{1 + \eta \mu 2x + \sin 2x}$. Να δείξετε ότι: $A = \varepsilon \varphi x$.

12. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2\eta\mu x + \eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\eta\mu x.$

13. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = \varepsilon\varphi 2x.$

14. Δίνονται $A = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^3 2x + \dots$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Να δείξετε ότι:
 $A = \varepsilon\varphi^2 x.$

15. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu(2\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)} = 2\eta\mu\alpha.$

16. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 4x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = 2$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta\mu 4x}{4}$

18. Να αποδειχθεί ότι $(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha) \cdot (\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \eta\mu 3\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha.$

19. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\sigma\upsilon\nu^4 \alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + 1.$

20. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\eta\mu 2\alpha + 2\eta\mu^2(45^\circ - \alpha) = 1.$

21. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{2(1 - \sigma\upsilon\nu x)} = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}$

22. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 3x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1} = 2\sigma\upsilon\nu x.$

23. $\frac{\eta\mu 2x + 1}{1 + \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1}{2}(\varepsilon\varphi x + 1)$
 Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

24. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 5x}{2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 5x} = 2\eta\mu 4x$

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 5x}{2\eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 5x} = \sqrt{3}$ για $x \in (0, 2\pi)$

25. α) Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 4\eta\mu^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$

β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $(\sigma\upsilon x - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3})^2 + (\eta\mu x - \eta\mu \frac{\pi}{3})^2 = 1.$

26. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x + \eta\mu 5x + 2\eta\mu 3x} = \varepsilon\varphi x.$$

β) Με τη χρήση της παραπάνω ταυτότητας ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x + \eta\mu 5x + 2\eta\mu} = 2\eta\mu x, \text{ στο διάστημα } (0, 2\pi).$$

3. Συναρτήσεις

1. Από τη διπλανή γραφική παράσταση να βρείτε :

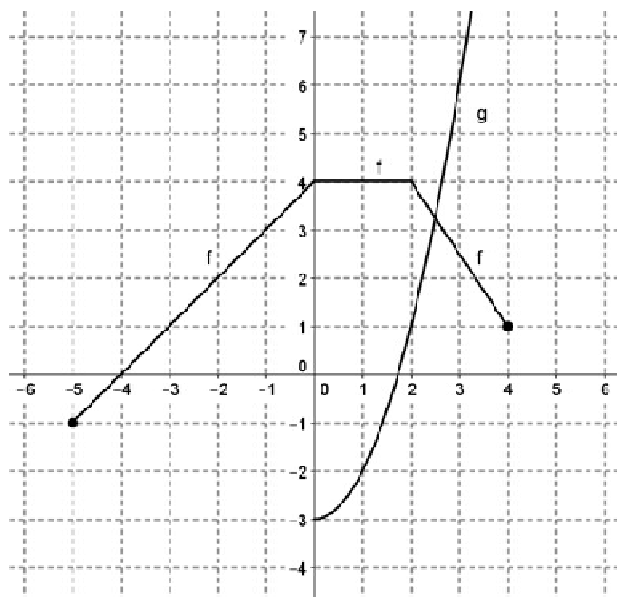
α) Τα πεδία ορισμού:

- i. της $f(x)$
- ii. της $g(x)$
- iii. της $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$
- iv. της $g^{-1}(x)$

β) Τις τιμές (αν υπάρχουν):

- i. $(f + g)(-3)$
- ii. $(f \circ g)(2)$
- iii. $(f \circ f)(0)$

(γ) Το είδος της συνάρτησης $f(x)$.



2. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού και σύνολα τιμών των συναρτήσεων f και g .

β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες, περιττές ή κανένα από τα δύο.

γ) Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

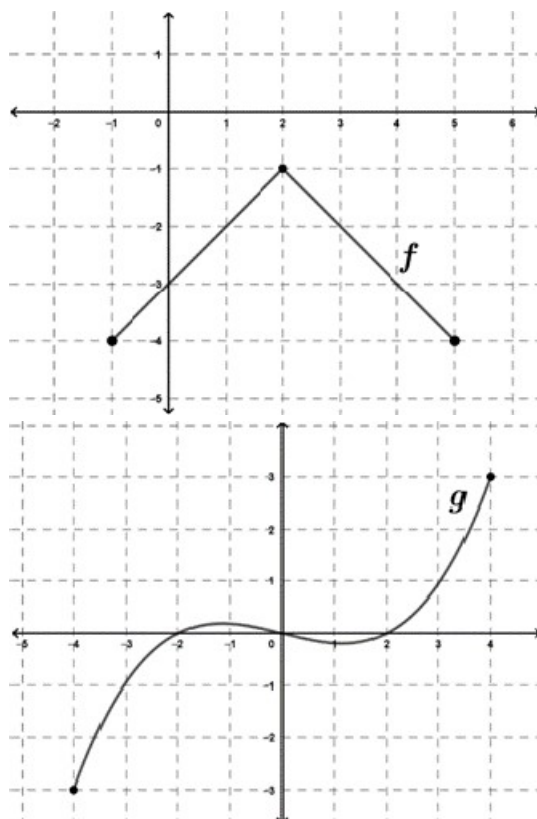
δ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των:

- i. $(f \cdot g)(4)$
- ii. $(f \circ g)(4)$

ε) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- i. $f + g$
- ii. $\frac{f}{g}$
- iii. $h(x) = f\left(\ln \frac{1}{x}\right)$

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot f(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.



3. Να λύσετε τις Εξισώσεις / Ανισώσεις

α) $|3x - 7| < 8$.

β) $5|x - 2| = 15$

γ) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$

δ) $|x + 8| - 5 = 0$

ε) $|2x| - 6 \geq 0$

στ) $|x - 3| - 2 \geq 0$

ζ) $|2x - 1| = 7$

η) $|x + 5| = 2x - 7$

θ) $\sqrt{(x - 5)^2} = 2$

4. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in (0, +\infty)$ για την οποία το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $|5 - \alpha x| < 9$ είναι το διάστημα $(-2, 7)$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής f και g , που ορίζονται από τους τύπους:

α) $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2+1}$

β) $g(x) = \frac{x-5}{|x|-1}$

γ) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

δ) $k(x) = \log_{2-x}(x + 3)$

6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln(x+3) + \alpha}{\sqrt{7-x}}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 4)$, να βρείτε τη τιμή του α .

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{3x-1}{2x+4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

8. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = |x| + 2$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x ώστε $\frac{f(x)}{2-x} = 3$.

9. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 3x - 2, & 0 < x \leq 4 \end{cases}$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = |x| - 3$ και $g(x) = \frac{x^2-9}{|x-2|+5}$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2|x|} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 + \frac{2}{|x|}$$

Να εξετάσετε αν είναι ίσες και σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες.

12. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{|x|+2}$. Αν δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο να είναι ίσες.

13. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = \sqrt{(3x-2)^2}$ και $g(x) = 2 - 3x$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι ίσες.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$, $g(x) = \frac{x^2-8x+1}{x-5}$, $h(x) = \log(x-2)$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Σε περίπτωση που ισχύει $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = g$.

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{g}{h}$.

15. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = \frac{x^2-5|x|+6}{3-|x|}$ και $g(x) = 2 - \sqrt{x^2}$ είναι ίσες. Αν $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = g$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-4}{2-x}$ και $g(x) = \frac{x^2-3x}{x-2}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x+1$. Να βρείτε τους τύπους και το πεδίο ορισμού (ευρύτερο δυνατό) των συναρτήσεων:

α) $\frac{f}{g}$

β) $f \circ f$.

18. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x-2) = x^2 - 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:
 $f(x) = x^2 - x$.
19. Να βρείτε την συνάρτηση f έτσι ώστε:
 α) $(f \circ g)(x) = 2x^2 - x + 3$ και $g(x) = x - 1$.
 β) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = x + 1$.
20. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$
 α) Να ορίσετε τη συνάρτηση: $(f+g)$
 β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h = \frac{g \circ f}{g}$
21. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους: $f(x) = \sqrt{x-6}$,
 $g(x) = \frac{1}{x-5}$.
 α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
 β) Να ορίσετε πλήρως την συνάρτηση $g \circ f$ (τύπος και πεδίο ορισμού).
 γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη της g . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
 δ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή (αν υπάρχει) της $(g \circ f)(10)$.
22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ και $g: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ με τύπο $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$.
 α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή τίποτε από τα δύο.
 β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της g . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
 γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
23. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{|x|-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $f: B \rightarrow [0, +\infty)$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$
 α) να δείξετε ότι: $B = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 β) να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ f$
 γ) να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την g^{-1}
 δ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) \sin x}{2x+1}$
24. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}-|x-5|}{x}$.
 α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{g}{f}$.
 β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3,4)$ τέτοιο ώστε: $\frac{g}{f}(\xi) = \frac{5}{e^2}$.

25. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g: B \rightarrow g(B)$ με τύπο $g(x) = \sqrt{1-x^2}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων.
 - Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι άρτιες ή περιττές ή τίποτα από τα δύο.
 - Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)$. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
 - Να ορίσετε πλήρως τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπο και πεδίο ορισμού).
26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = 4 + \sqrt{x-2}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
 - Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
27. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (-3,3) \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ και $g: (-2,4) \rightarrow g(B)$ με τύπο $g(x) = x+1$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
 - Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
28. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με
- $$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}, \quad h(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x+4}\right)$$
- Να βρείτε τα Πεδία Ορισμού των τριών συναρτήσεων f, g και h .
 - Να εξετάσετε εάν η f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.
 - Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.
 - Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
 - Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{h(x)}$
29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x^2 - 4x + 7$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
 - Να εξετάσετε αν $f^{-1} = g$. Αν όχι, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f^{-1} = g$.
 - Δίνεται η συνάρτηση $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$.
30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: [2, +\infty) \rightarrow h(\Gamma)$, με τύπους $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{9x^2-x^4}}{x}$ και $h(x) = x^2 - 4x$.
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της.
 - Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f = g$.
 - Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της h και να την ορίσετε.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f: (2, +\infty) \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$, $g: B \rightarrow g(B)$ με τύπο $g(x) = \ln(\sqrt{4-x})$
 $h: \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο $h(x) = |x-3|$ και $k: [1, +\infty) \rightarrow k(A)$ με τύπο $k(x) = (x-1)^2 - 1$

- α) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ h$. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $\frac{g(x)}{k(x)}$.
- δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $q(x) = |x+3| \cdot h(x)$ είναι άρτια ή περιττή.

32. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$. Στην περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε το τύπο και το πεδίο ορισμού της.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους

$$f(x) = |x-2|, g(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3} \text{ και } h(x) = \sqrt{x-1}$$

- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{h}{g}$.
- β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε $f(x) = g(x)$.
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ f$.

34. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και τύπο: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή ή ούτε άρτια ούτε περιττή.
- β) Να λύσετε την εξίσωση: $2f(x) - f(-x) = f(3)$
- γ) Αν $A = [0, +\infty)$, να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησης f . Σε περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$, $g: B \rightarrow g(B)$, με τύπους $f(x) = 4 - \sqrt{x-2}$, $g(x) = e^x + 1$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού A, B .
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$ (τύπο και πεδίο ορισμού).
- γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη της (τύπο και πεδίο ορισμού).
- δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπο και πεδίο ορισμού).

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x} + 1$ και $g(x) = \ln(3-x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .
- β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της g και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) \cdot g^{-1}(x) = 4$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+1}{5-\lambda}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{5\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η $f(x)$ να είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για $\lambda = 3$: Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $f(x) + 1$ και $f^{-1}(x - 3)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων, αναφέροντας τα σημεία τομής τους με τους άξονες συντεταγμένων.

γ) Να αναφέρετε την εξίσωση της ευθείας ως προς την οποία είναι συμμετρικές οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $f^{-1}(x)$.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

I. $f(\eta\mu 2x) \cdot f(\sigma\upsilon\nu x) = \frac{f(2)}{f(4\eta\mu^2 \frac{x}{2})}$

II. $f^{-1}(x) + 5 \log_x 2 - 6 = 0$

38. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$, όπου $A = [1, +\infty)$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$g(x) = \sqrt{x+4}$ και $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{x-4}{9-x^2}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{h}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{g(x) - 2}$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι επί και έχει την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f \circ f$ είναι περιττή.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.

γ) Να δείξετε ότι: $f(0) = 0$.

δ) Να δείξετε ότι: $f^{-1}(x) = f(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Όρια

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

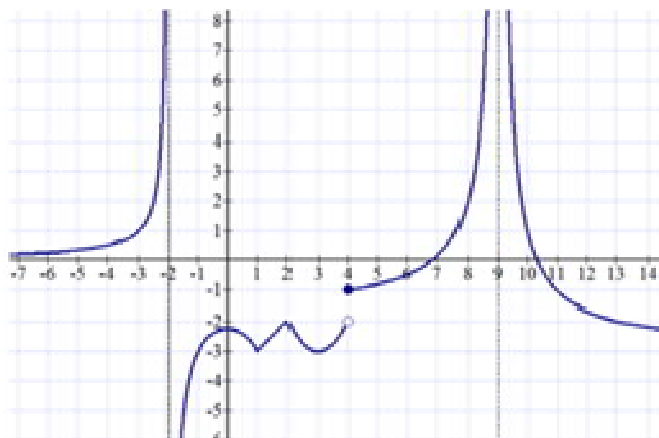
(α) το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

(δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) =$



2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

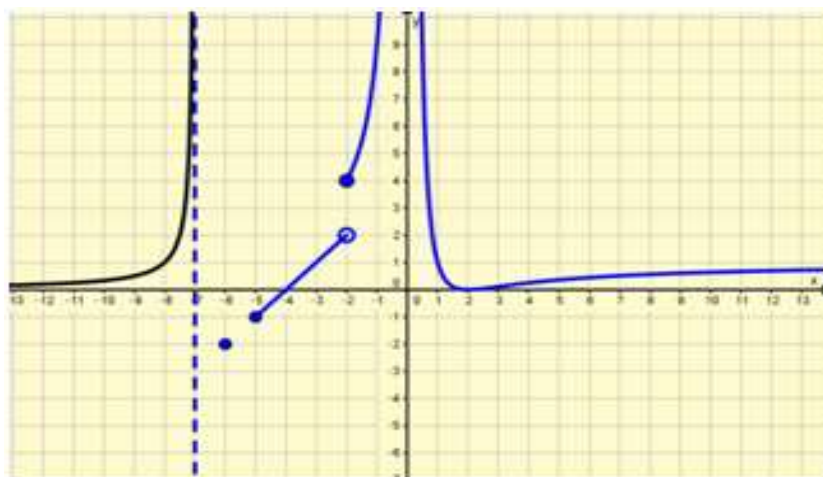
α) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ στ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ζ) $\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x)$ η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ι) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



3. α)

Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $|x - 3|$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 3|}$.

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 5}{2x^2 - 9}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4}$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x + 2}{1 - x^4}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x - 2)}{x^2 + x - 6}$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+|3x|+2}{x-2}$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5x}{2x+1}$

9. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x+x^2}{5x^2+6}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2-1|}{x^2-4x+3}$

10. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9}$

β) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x^2-8x+15|}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+3}-x)$

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x, & x < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

12. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - a^2x, & x < 1 \\ 5x + a - 4, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f είναι συνεχής στο 1.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 + 3)x + 2\beta, & \text{αν } x < 2 \\ 20, & \text{αν } x = 2 \\ 2\alpha x^3 + 4, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β , για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin 2x}{8x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ (x + \alpha) \ln e^a, & x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \beta \ln(3x) + \eta \mu x^2 + x, & x \geq 0 \\ 7x + \alpha, & x < 0 \end{cases}$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε και την τιμή του β , για την οποία η συνάρτηση είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3 - 5x + 1$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

β) Να εξετάσετε κατά ποσό υπάρχει $x_0 \in [-2, 2]$, ώστε να ισχύει $f(x_0) = 2$.

17. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

β) Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα (γραφικά ή με τύπο) όπου δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Bolzano επειδή δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x^3 + 2x - 3 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2}{x} + 3 = \sqrt{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(9, 16)$.

18. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \alpha + 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\alpha e^x}{x} \cdot \frac{|2x - x^2|}{x - 2} + \beta, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

19. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\sqrt{3x+3} \leq (x-2)f(x) + 3 \leq \frac{x^2 - 3x + 8}{2}$, $\forall x \in (2, 3)$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

5. Ακολουθίες

- Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο: $\alpha_n = 3n + 1$
 α) Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.
 β) Να δείξετε ότι είναι κάτω φραγμένη.
- Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, με γενικό όρο: $\alpha_n = 6 + \frac{1}{n}$
 α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας α_n .
 β) Να δείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι φραγμένη.
- Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) και η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.
 α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία β_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να τη σχηματίσετε.
 β) Αν $\alpha_3 = \beta_3$ και $\beta_5 = \alpha_3 + \alpha_5$, να υπολογίσετε το άθροισμα των εκατό πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.
- Δίνεται η ακολουθία (α_n) , με $\alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
 α) Να εξετάσετε κατά πόσο η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη ή όχι. Σε περίπτωση που δεν είναι φραγμένη, να κάνετε αναφορά σε κάτω ή άνω φραγμένη.
 β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.
- Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $\alpha_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$
 α) να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα
 β) να υπολογίσετε το όριο της (α_n) .
- Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $\alpha_n = 4 \cdot 5^n + 1$.
 α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 5^{n+1} + n - 5, \forall n \in \mathbb{N}$.
 β) Να μελετήσετε την ακολουθία α_n ως προς τη μονοτονία.
 γ) Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας.
 δ) Να εξετάσετε κατά πόσο η ακολουθία είναι φραγμένη. Στην περίπτωση που δεν είναι φραγμένη, να κάνετε αναφορά σε άνω ή κάτω φραγμένη ακολουθία.
- Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ προκύπτει από τον τύπο $S_n = 9n - 2n^2$.
 α) Να δείξετε ότι η ακολουθία προκύπτει από τον γενικό τύπο $\alpha_n = 11 - 4n, \forall n \in \mathbb{N}$.
 β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι Αριθμητική Πρόοδος.
 γ) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία της.

8. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ προκύπτει από τον τύπο $\Sigma_n = n^2 + 2n$.
- Να αποδείξετε ότι η ακολουθία δίνεται από τον γενικό τύπο $\alpha_n = 2n + 1$
 - Να εξετάσετε την ακολουθία (α_n) ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
 - Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι κάτω φραγμένη και να βρείτε το μέγιστο κάτω φράγμα της
 - Να βρείτε τις τιμές του $n, n \in \mathbb{N}$, ώστε $|\alpha_n| \geq 21$
 - Να εξετάσετε κατά πόσο η ακολουθία $\beta_n = \frac{n\mu n}{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα ή όχι.
9. Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = 3 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)$
- Να υπολογίσετε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της ακολουθίας α_n .
 - Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι γεωμετρική πρόοδος.
 - Να εξετάσετε κατά πόσο η ακολουθία α_n είναι συγκλίνουσα.
 - Να εξετάσετε κατά πόσο η ακολουθία α_n είναι φραγμένη.
10. Δίνεται το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι: $\Sigma_n = 4^n - 1, n \in \mathbb{N}$
- να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_n = 4^n - 4^{n-1}$
 - να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος
 - να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$
 - να αποδείξετε ότι: $\ln(1 + \Sigma_1) + \ln(1 + \Sigma_2) + \dots + \ln(1 + \Sigma_n) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \ln 4$
11. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = e \cdot n \cdot (n + 1)$.
- Να βρείτε το γενικό όρο της ακολουθίας (α_n) και να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.
 - Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \dots + \alpha_{40}$ όπου $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{40}$ είναι όροι της πιο πάνω ακολουθίας.
 - Να λύσετε την εξίσωση: $10^{\log(2n-1)} + \ln \Sigma_n = \ln \left[\log \left(\frac{1}{e^{-5n}} \right) \ln 100 \right] + \log_2 4^n$, όπου $\Sigma_n = e \cdot n \cdot (n + 1)$.
12. Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = n^2 - 10n$.
- Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2n - 11$.
 - Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
 - Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \dots + \alpha_{38} + \alpha_{40}$.
 - Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της πιο πάνω ακολουθίας.
13. Δίνεται η Γεωμετρική πρόοδος $27, -9, 3, \dots$
- Να βρείτε:
- τον έκτο όρο της,
 - το άθροισμα των άπειρων όρων της.
14. Σε μια κάβα θα τοποθετηθούν μπουκάλια κρασιού με τέτοιο τρόπο, ώστε η πάνω σειρά να έχει ένα μόνο μπουκάλι και κάθε επόμενη σειρά να έχει δυο μπουκάλια περισσότερα από την προηγούμενη. Σε ποια σειρά θα υπάρχουν 23 μπουκάλια;

15. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του έκτου και του ενδέκατου όρου είναι ίσο με 27 και το άθροισμα των τριών πρώτων όρων είναι ίσο με 8.
 α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.
 β) Να υπολογίσετε τον δέκατο όρο της.
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.
16. Το πρώτο σκαλοπάτι μιας σκάλας απέχει από το έδαφος 22cm. Αν κάθε σκαλοπάτι, από το πρώτο και μετά, βρίσκεται 14cm πιο ψηλά από το προηγούμενό του, πόσο θα απέχει το εικοστό σκαλί από το έδαφος;
17. Οι γωνίες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αποτελούν τους τέσσερις πρώτους όρους Αριθμητικής Προόδου. Η μεγαλύτερη γωνία είναι ίση με 150° . Να βρείτε τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του τετραπλεύρου.
18. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με έκτο όρο 128 και ένατο όρο 1024. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της προόδου.
19. Σε αριθμητική πρόοδο πρώτος όρος είναι $\ln 3$ και ο τρίτος όρος $\ln 243$. Να δείξετε ότι το άθροισμα των n -πρώτων όρων της είναι $\Sigma_n = n^2 \ln 3$.
20. Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $\log 2^{x-2}$, $\log \sqrt{5^x + 2^{x-3}}$, $\log 63$ να είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.
21. Αν οι αριθμοί $\log_3(4 \cdot 3^x - 27)$, $\log_9(10 - 3^x)$, $-x$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε την τιμή του x .
22. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $\log 2, \log(5^x - 1), \log(5^x + 3)$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
23. Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \ln 3, \frac{1}{2} \ln(2^x + 3^x), \ln \frac{5}{3}$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
24. Σε Γεωμετρική Πρόοδο (a_n) δίνονται: $a_2 = \frac{1}{2} \eta \mu \theta$, $a_3 = \sigma \upsilon \nu \theta$, $a_4 = \sigma \varphi \theta$ με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 α) Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 β) Να βρείτε τον λόγο και το πρώτον όρο της Γεωμετρικής Προόδου.
25. Δίνεται Γεωμετρική Πρόοδος (a_n) , με λόγο $\lambda > 0$ και $\lambda \neq 1$. Αν το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της προόδου είναι 5 και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι 85, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του n , ώστε να ισχύει $a_n > 260$.

26. Δίνεται η ακολουθία (a_n) , με γενικό όρο $a_n = 3 - 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι Αριθμητική Πρόοδος.
- β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων της ακολουθίας.
- γ) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία.
- δ) Να γράψετε ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.
- ε) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$I = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + \dots + a_{30}^2 - (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{29}^2)$$

27. Έστω αριθμητική πρόοδος με $a_1 = \ln \alpha$, $\alpha > 0$ και $\delta = \ln \beta$, $\beta > 0$.

- α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι: $\Sigma_n = \frac{n}{2} \cdot \ln (\alpha^2 \cdot \beta^{n-1})$.
- β) Αν $\beta = 1$ και $\alpha = 2$, να αποδείξετε ότι $e^{-\Sigma_1} + e^{-\Sigma_2} + e^{-\Sigma_3} + \dots = 1$.

28. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^{(\log_3 x)-1} = 9$

- β) Αν $x = 9$ είναι η ακέραια λύση της εξίσωσης: $x^{(\log_3 x)-1} = 9$ και x, y, ω είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, ενώ οι $x - 2, y, 2\omega - 10$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε τις τιμές των y και ω .

29. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της ισούται με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{18\sqrt{x^2+5}-54}{x-2}$ και η διαφορά δ ισούται με το άθροισμα των δύο ριζών της εξίσωσης: $\log_x(64) = \log_x^2(4) + 6^{\log_6(2)}$.

- α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.
- β) Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 250.

30. Δίνεται η ακολουθία: $\eta\mu\alpha, \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha, (\eta\mu\alpha - \eta\mu^3\alpha), \frac{\eta\mu 2\alpha(1+\sin 2\alpha)}{4}, \dots, \left(\alpha \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) η πιο πάνω ακολουθία είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \sin \alpha$,
- β) το άθροισμα Σ_{∞} των άπειρων όρων της είναι ίσο με $\Sigma_{\infty} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2}$.

31. Έστω οι αριθμοί $\chi, \log \sqrt{5^x \cdot 6}$ και $\log(1 + 2^x)$ είναι ο τρίτος, τέταρτος και πέμπτος όρος αντίστοιχα, αριθμητικής προόδου (a_n) .

- α) Να δείξετε ότι $\chi = 1$.
- β) Να δείξετε ότι η διαφορά $\delta = \log \frac{\sqrt{30}}{10}$
- γ) Να βρείτε τον πρώτο όρο της.
- δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα (Σ_n) των εννέα πρώτων όρων της.

6. Γεωμετρικές κατασκευές

1. Να δώσετε τον ορισμό των πιο κάτω Γεωμετρικών Τόπων:

α) Κύκλος

β) Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.

7. Εκθετικές Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Να επιλύσετε τις εξίσώσεις:

a) $2^{|2x-1|} = 8$

b) $\log_x 27 = 3$

c) $\log_2 x - \log_4 (x-1) = 1$.

d) $\log_2 x = \log_4 (5x-4)$.

e) $\log_3 (x+4) - \log_3 (x) = 2$

f) $\log(x+1) + 2 \cdot \log \sqrt{5x} = 2$

g) $\ln(4^x + 4) = \ln 5 + \ln 2^x$

h) $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

i) $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$

j) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 81 + 6 \cdot 3^{x-2}$

k) $9^{\log x} - 12 \cdot 3^{\log x} + 27 = 0$

l) $\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$.

m) $\log_2 (9^{\eta\mu^2 x}) + \log_2 9 = \log_2 (3^{5\eta\mu x})$

n) $\log_3 (9^x - 2 \cdot 3^{x+1}) = \log_2 (8 - \log_{100} 1)$

o) $\log_2 (6 \cdot 9^{\sigma\nu^2 x}) - \eta\mu x \cdot \log_2 3 = 1$

p) $\log_3 (4^x + 2^x + 3) - 1 = 2 \cdot \log_9 (2^{x+1} - 1)$

q) $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

2. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$. Στην περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε το τύπο και το πεδίο ορισμού της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x^2 - 8x + 17)$

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της

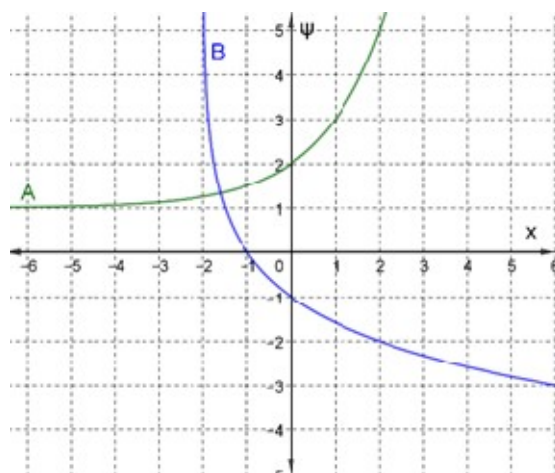
β) Να δείξετε ότι: $f(2) = 1 - \log 2$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2) = \log(x^2 - 8x + 17)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow R$, $g: B \rightarrow R$, $A, B \subseteq R$ με $f(x) = e^{-x} + 1$ και $g(x) = \ln(3-x)$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .
- β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της g και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) \cdot g^{-1}(x) = 4$.
5. Δίνονται οι αριθμοί $\kappa = (\sqrt{e})^{\ln 4}$ και $\mu = 10^{2 \log \sqrt{3}}$.
- α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\mu = 3$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\kappa \log x - \log(\mu x) = 2$.

6. Στο πιο πάνω γράφημα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log_\gamma(x + \delta)$ και $g(x) = \alpha^x + \beta$.

Να αντιστοιχίσετε το κάθε γράφημα Α, Β με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

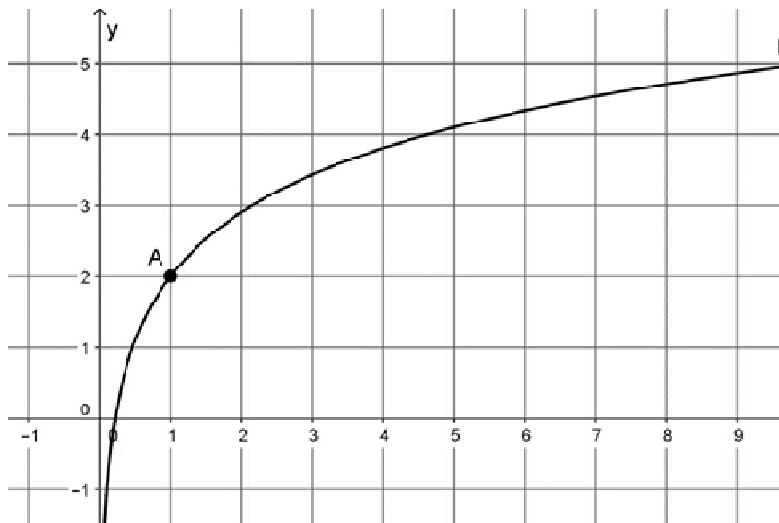


7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log(2x^2 - x)}{x - 3}$
- α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$
- β) να δείξετε ότι $2f(x) \cdot (x^2 - 9) - 2\log(2x - 1)^{x+3} = \frac{2(x+3)\ln x}{\ln 10}$
- γ) να λύσετε την εξίσωση $(x - 3)f(x) = \log(x^2 + 3x - 4)$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \log x + \beta$, $x \in (0, +\infty)$.

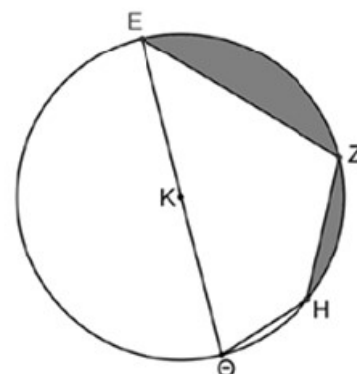
α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 11$



8. Κανονικά πολύγωνα – Μικτογράμμα

1. Σε κύκλο (O, R) με $R = 10 \text{ cm}$, παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{BG} = 90^\circ$ και $\widehat{GD} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABGD$.
2. Σε κύκλο (O, R) και εκατέρωθεν του κέντρου του θεωρούμε δυο παράλληλες χορδές του $AB = R$ και $GD = \sqrt{2} R$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R τις μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου $ABGD$, το ύψος του και το εμβαδόν του.
3. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου να γράψετε ημικύκλια εκτός του κύκλου. Να δείξετε ότι το αθροισμάτων εμβαδών των μηνίσκων που σχηματίζονται είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου.
4. Δίνεται κύκλος $(K, 4 \text{ cm})$ με χορδή $AB = \lambda_3$ και διάμετρο $B\Gamma$.
Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.
5. Σε κύκλο $(K, 3 \text{ cm})$ με διάμετρο $E\Theta$, παίρνουμε διαδοχικές χορδές $EZ = \lambda_4$ και $ZH = \lambda_6$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος, συναρτήσει του π .

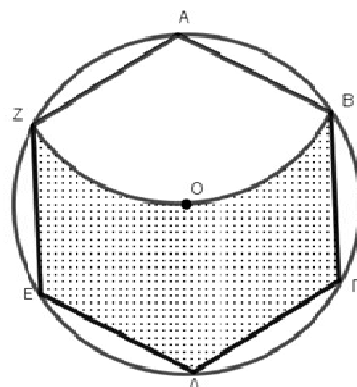


6. Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα R γράφουμε τόξο

$\widehat{ΒΟΖ}$ μέσα στο εξάγωνο.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖΑ συναρτήσει του R.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του σκιασμένου μέρους.

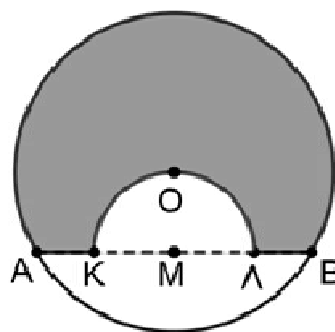


7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Ο, R) και η χορδή ΑΒ = λ₃.

Με κέντρο το μέσο Μ της χορδής φέρουμε ημικύκλιο με ακτίνα ΜΟ.

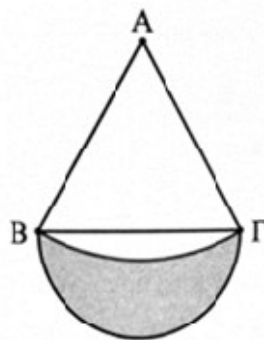
α) Να αποδείξετε ότι $ΜΟ = \frac{R}{2}$

β) Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.

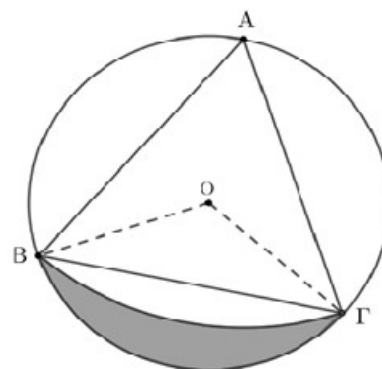


8. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ εκτός του τριγώνου.

Γράφουμε το τόξο $\widehat{ΒΓ}$ του κύκλου (Α, ΑΒ). Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου, συναρτήσει του α.



9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο ΒΓ. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου, συναρτήσει του R.



Σύνθετες Ασκήσεις

- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$, $A = [-1, +\infty)$, με τύπο $f(x) = x^2 + 2x + 1$ και $g: B \rightarrow [0, +\infty)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \alpha^{\log_\alpha(2x)} + 5 \cdot \log_x x + 6 \cdot \log_x 1$, όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το 1.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} της f .
 - Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g και να γράψετε τον τύπο της στην πιο απλή του μορφή (χωρίς λογάριθμους).
 - Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f - g$ και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι άρτια συνάρτηση.
 - Να γράψετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
- Δίνεται ότι $A = \frac{\eta\mu(8x+\frac{\pi}{3})+\eta\mu(8x-\frac{\pi}{3})}{\sigma\upsilon\nu(6x)+\sigma\upsilon\nu(2x)}$ και ότι $-|\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x|^2$, B , $|\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x|^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, όπου $x \in [0, \frac{\pi}{8})$.
 - Να δείξετε ότι: $A = 2\eta\mu(2x)$ και $A = 2B$.
 - Να λύσετε την εξίσωση: $2^A + 2^B = 2$, αν $x \in [0, \frac{\pi}{8})$.
- Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{2\eta\mu 2x}$, $B = \frac{2\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 3x - \eta\mu 8x}{2\sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 5}$ και η ακολουθία (α_n) , $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 = 4\eta\mu x$, $\alpha_2 = 2\eta\mu 2x$, $\alpha_3 = \eta\mu 3x + \eta\mu x$ όπου $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
 - Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu x$ και $B = 2\eta\mu x$.
 - Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.
 - Να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας (α_n) , $n \in \mathbb{N}$ δίνεται από τη σχέση $\Sigma_\infty = 4\sigma\varphi \frac{x}{2}$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $\Sigma_\infty = 4B$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \square \rightarrow (-3, +\infty)$ με τύπο $f(x) = 2e^{x+1} - 3$.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την f^{-1} .
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{e^{3+\ln 8}}{100^{\log e}} - \log_3 27$ (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).
 - Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
 - Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(-2, 0)$.
- Το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας α_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = \frac{5^n - 1}{4}$.
 - Να δείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι απολύτως γνησίως αύξουσα γεωμετρική πρόοδος.
 - Να υπολογίσετε: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\alpha_2} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\alpha_3} + \dots \right) \right)$

6. Δίνονται οι αριθμοί: $\log_2 x, \log_2 \frac{1}{\sqrt{x}}, \log_2 \sqrt[4]{x}, x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

β) Αν ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου ισούται με 1, να δείξετε ότι είναι φθίνουσα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left[3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots\right)\right]^{\log_2 k} = 16^{\log_2 k}$.

δ) Αν $k \in \mathbb{Z}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \eta \mu(kx) + kx}{x^2 + kx}$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow g(B)$ με τύπους: $f(x) = \log_2(x-1)$ και $g(x) = -\log_2(4-x^2) - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι $g(x) = \log_2 \left(\frac{x+2}{2-x} \right)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.

γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ και $h(x) = \frac{1}{x}$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις (τύπος και πεδίο ορισμού):

i) $f \cdot g$ και

ii) $h \circ f$

β) Αν $x \in (1, +\infty)$, να δείξετε ότι: $e^{\frac{1}{2} \ln(1+h(x)+h^2(x)+h^3(x)+\dots)} = g(x)$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \log_{x^2+1}(9-x^2)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να υπολογίσετε το x , $x \in (0, 3)$, ώστε οι $\log_{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{3-x} \right)$, $f(x)$, $\log_{\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{3+x} \right)$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin 4x \cdot \sin 3x - \sin 5x \cdot \sin 2x$ και $g(x) = 5\eta \mu^2 x - 3\sigma \upsilon \nu^2 x - 1$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x) = \eta \mu 2x \cdot \eta \mu x$ και $g(x) = -4\sigma \upsilon \nu 2x$.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{\eta \mu 2x} - \frac{g(x)}{4} - 1 = 0$ στο $(0, 2\pi)$.

11. (α) Αν $A = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$, να αποδείξετε ότι $A = 2\eta\mu x$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^3}{8} + \frac{A^4}{16} - \dots = \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

12. α) Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\varphi x = -\sqrt{3}, x \in \mathbb{R}$.

β) Οι θετικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σχηματίζουν ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ο νιοστός όρος της ακολουθίας είναι ο $\alpha_n = (3n - 1)\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ και να εξετάσετε κατά πόσο είναι φραγμένη ή όχι.

δ) Να δείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος και να υπολογίσετε:

i. ποιος από τους όρους της ισούται με $\frac{2018\pi}{3}$.

ii. το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.

13. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 2x + \dots = 3$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2(30 - x) - \eta\mu^2(30 + x)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2} + 1$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1}$

15. Σε αριθμητική πρόοδος το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της ισούται με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{18\sqrt{x^2+5} - 54}{x-2}$ και η

διαφορά δ ισούται με το άθροισμα των δύο ριζών της εξίσωσης

$$\log_x(64) = \log_x^2(4) + 6^{\log_x(2)}.$$

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 250.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους, $f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + 2\beta}{2x^2 + 5}$ και $g(x) = 2\beta x - (\alpha - 5)\ln x^2$ όπου

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0. \text{ Επίσης, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ και } g'(3) = 6$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ και $\beta = 4$

β) Αν $h(x) = \ln(x + 2)$

i. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ h$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $(f \circ h)(x) - g(x) = 2 + 6 \ln x - 8e^{\ln x}$